ΟΡΙΣΜΟΣ

- Έστω $f: E \to E$ ένας ενδομορφισμός του E και $\dim_K E < \infty$.
Η ορίζουσα $\det(f)$ ορίζεται να είναι $\det(f) = |M_B^B(f)|$ όπου B τυχούσα βάση του f.
- $\lambda \in K$ καλείται ιδιοτιμή του $f \iff \exists \vec{x} \in E,\ \vec{x} \neq \vec{0}\ f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.
- Αν λ ιδιοτιμή του f και $f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$ όπου $\vec{x} \neq \vec{0}$ τότε $\vec{x}$ ιδιοδιάνυσμα του f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

ΠΡΟΤΑΣΗ

$A \in M_n(K)$
- $\lambda \in K$ καλείται ιδιοτιμή του $A \iff \exists\ x \in K^n,\ x \neq 0\ Ax = \lambda x$. Αν λ ιδιοτιμή του A και $Ax = \lambda x$ όπου $x \in K^n$, $x \neq 0$. Τότε x ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.
- Αν λ ιδιοτιμή του f, τότε $V(\lambda) = \{\vec{x} \in E \mid f(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$ καλείται ο ο ιδιοχώρος του f που αντιστοιχεί στην λ.
- Ο ιδιοχώρος $V(\lambda)$ του f είναι ένας υπόχωρος του E ο οποίος είναι ο οποίος είναι f-αναλλοίωτος δηλαδή $\forall \vec{x} \in V(\lambda)\ f(\vec{x}) \in V(\lambda)$
- Αν λ ιδιοτιμή του λ, τότε $V(\lambda) = \{x \in K^n / Ax = \lambda x\}$ καλείται ο

ο ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί στο λ

- Ο ιδιοχώρος $V(\lambda)$ του A είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{K}^n$ ο οποίος είναι A-αναλλοίωτος δηλαδή $x \in V(\lambda) \Rightarrow Ax \in V(\lambda)$

Παρατήρηση

f ισομορφισμός $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$

Πρόταση

Ο αριθμός $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του $f \Leftrightarrow \det(f - \lambda Id_\varepsilon) = 0$

[όπου $f - \lambda Id_\varepsilon \; \varepsilon \to \varepsilon$, $(f - \lambda Id_\varepsilon)(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \lambda \vec{x}$]

Απόδειξη

λ: ιδιοτιμή του $f \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in \varepsilon, \vec{x} \neq \vec{0} \cdot f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in \varepsilon, \vec{x} \neq \vec{0}$ $(f - \lambda Id_\varepsilon)(\vec{x}) = \vec{0} \Leftrightarrow \exists \vec{x} \in \varepsilon, \vec{x} \neq \vec{0}\ \vec{x} \in \ker(f - \lambda Id_\varepsilon) \Leftrightarrow$ $\ker(f - \lambda Id_\varepsilon) \neq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow$ ο ενδομορφισμός $f - \lambda Id_\varepsilon$ δεν είναι μονομορφισμός $\Leftrightarrow$ ο ενδομορφισμός $f - \lambda Id_\varepsilon$ δεν είναι ισομορφισμός $\Leftrightarrow \det(f - \lambda Id_\varepsilon) = 0$

Έστω $B = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ βάση του ε και έστω ότι $A = M_B^B(f)$ $M_B^B(f - \lambda Id_\varepsilon) = M_B^B(f) - M_B^B(\lambda Id_\varepsilon) = A - \lambda I_n$. Τότε από την πρόταση λ ιδιοτιμή του $f \Leftrightarrow |A - \lambda I_n| = 0$. Έστω ότι λ ιδιοτιμή του f και έστω $\vec{x} \in \varepsilon$. Έστω $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$ η μοναδική γραφή του $\vec{x}$ ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης B.
$\vec{x} \in V(\lambda) \Leftrightarrow f(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \Leftrightarrow f(x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}) = \lambda(x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}) \Leftrightarrow x_1 f(\vec{e_1}) + \dots + x_n f(\vec{e_n}) = \lambda x_1 \vec{e_n} + \dots + \lambda x_n \vec{e_n} \Leftrightarrow$ $x_1(a_{11}\vec{e_1} + a_{21}\vec{e_2} + \dots + a_{n1}\vec{e_n}) + \dots + x_n(a_{1n}\vec{e_1} + \dots + a_{nn}\vec{e_n}) =$ $\lambda_1 x_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n x_n \vec{e_n} \Leftrightarrow (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)\vec{e_1} + \dots + (a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n)$ $\vec{e_n} = \lambda_1 x_1 \vec{e_1} + \dots + \lambda_n x_n \vec{e_n} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda) + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

$\vec{x} \in V(\lambda) \iff$ οι συντελεστές του $x_1, \dots, x_n$ είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε την ορίζουσα

$$|A - tI_n| = \begin{vmatrix} a_{11}-t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-t & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-t \end{vmatrix} = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το πολυώνυμο $|A - tI_n|$ καλείται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του ενδομορφισμού f.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ $P_f(t) = |A - tI_n| = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$

Άρα λ - ιδιοτιμή του $f \iff P_f(\lambda) = 0$ δηλαδή το λ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $f(x,y) = (-2x+y, -4x+2y)$, $B = \{\vec{e_1} = (1,0), \vec{e_2} = (0,1)\}$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{e_1}) &= f(1,0) = (-2,-4) = -2\vec{e_1} - 4\vec{e_2} \\ f(\vec{e_2}) &= f(0,1) = (1,2) = 1\vec{e_1} + 2\vec{e_2} \end{aligned}\right\} A = M_B^B(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P_f(t) = \begin{vmatrix} -2-t & 1 \\ -4 & 2-t \end{vmatrix} = (-2-t)(2-t) + 4 \Rightarrow P_f(t) = t^2$$

Άρα η μόνη ιδιοτιμή του f είναι η $\lambda = 0$ (διπλή ρίζα του $P_f(t)$)

$$V(0) \quad \begin{pmatrix} -2-0 & 1 \\ -4 & 2-0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0 \\ -4x_1+2x_2=0 \end{cases} \Rightarrow -2x_1+x_2=0 \Rightarrow x_2=2x_1$$

$V(0)=\{\vec{x}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}\in\mathbb{R}^2 \mid x_2-2x_1\}=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_2=2x_1\}=\{(x_1,2x_1)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\in\mathbb{R}\}=\langle(1,2)\rangle$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y,z)=(x+y+2z,\ -x+2y+z,\ y+3z)$

$B=\{\vec{e_1}=(1,0,0),\ \vec{e_2}=(0,1,0),\ \vec{e_3}=(0,0,1)\}$ κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{aligned} f(\vec{e_1})&=f(1,0,0)=(1,-1,0)\\ f(\vec{e_2})&=f(0,1,0)=(1,2,1)\\ f(\vec{e_3})&=f(0,0,1)=(2,1,3)\end{aligned}\right\} A=M_B^B(f)=\begin{pmatrix}1&1&2\\-1&2&1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

Άρα $P_f(t)=(1-t)(2-t)(3-t)$ Άρα ιδιοτιμές τω λ $\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=2\\ \lambda_3=3\end{cases}$

$$\lambda_1=1:\ \begin{pmatrix}1-1&1&2\\-1&2-1&1\\0&1&3-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \left.\begin{aligned}y+2z&=0\\-x+y+z&=0\\x+2z&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned}&y=-2z\\&-x-2z+z=0\Rightarrow\\&x=-z\end{aligned}$$

$V(1)=\left\{x,y,z\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{aligned}x&=-z\\y&=2z\end{aligned}\right\}=\{(-z,2z,z)\in\mathbb{R}^2 \mid z\in\mathbb{R}\}$

Άρα $V(1)=\langle(-1,-2,-1)\rangle$

Παρόμοια $V(2)=\langle(1,-1,1)\rangle$ κ' $V(3)=\langle(1,0,1)\rangle$

Το άθροισμα $V(1)+V(2)+V(3)$ είναι ευθύ διότι η ένωση των βάσεων $\{(-1,-2,1),(1,-1,-1),(1,0,1)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$ διότι $\begin{vmatrix}-1&2&1\\1&-1&1\\1&0&1\end{vmatrix}\neq 0.$

Άρα $\mathbb{R}^3 = V(1) \oplus V(2) \oplus V(3)$

$$\left.\begin{aligned} f(-1,-2,1) &= 1(-1,-2,1) \\ f(1,-1,1) &= 2(1,-1,1) \\ f(1,0,1) &= 3(1,0,1) \end{aligned}\right\} M_e^e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

f: διαγωνοποιήσιμος

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $A \in M_n(\mathbb{K})$, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ορίζεται να είναι $P_A(t) = |A - tI_n|$. Ιδιοτιμές του $A \equiv$ ρίζες του $P_A(t)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Τότε $P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ 1 & 1-t \end{vmatrix} = -t + t^2 - 1 \Rightarrow$

$P_A(t) = t^2 - t - 1$. ρίζες $P_A(t)$ είναι $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

- $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 x + y = 0 \rightarrow y = \lambda_1 x$

Άρα $V(\lambda_1) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \;\middle|\; y = \lambda_1 x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \lambda_1 x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R}_2 \right\}$

$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} \right\rangle$. παρόμοια $V(\lambda_2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\rangle$

Η ένωση $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right\}$ των βάσεων των ιδιοχώρων $V(\lambda_1)$, $V(\lambda_2)$ είναι βάση του $\mathbb{R}_2$, διότι $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$e = \{ \varepsilon_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \varepsilon_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \}$ βάση του $\mathbb{R}^2$

$\left.\begin{matrix} f_A(\varepsilon_1') = \lambda_1 \varepsilon_1' \\ f_A(\varepsilon_2') = \lambda_2 \varepsilon_2' \end{matrix}\right\} \Rightarrow M_e^e f(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $M_6^6(f(A)) = A$

Άρα οι A κ' $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ είναι όμοιοι $\Rightarrow$

$\exists$ αναστρέψιμος πίνακας $P : P^{-1}AP = B$ όπου

$P = M_6^e = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Τότε $A = PBP^{-1} \Rightarrow A^n = PB^nP^{-1} \Rightarrow$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} =$

$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\lambda_2\lambda_1^n + \lambda_1\lambda_2^n & \lambda_1^n - \lambda_2^n \\ -\lambda_2\lambda_1^{n+1} + \lambda_1\lambda_2^{n+1} & \lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix}$

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

Ακολουθία Fibonacci

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8,$
$F_7 = 13, \ldots, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \forall n \geq 1.$

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Αν $f: E \to E$ ενδομορφισμός του E, $\dim_K E = n < \infty$
$P_f(t) = |A - tI_n|$ όπου $A = M_B^B(f)$, B τυχούσα βάση του E.
Αν e άλλη βάση του E και B, $B = M_e^e(f)$

Ισχυρισμός $|A - tI_n| = |B - tI_n|$. Οι A, B όμοιοι $\Rightarrow \exists$ αντιστρέψιμος πίνακας $P = M_B^e$ $P^{-1}AP = B$

$|B - tI_n| = |P^{-1}AP - tI_n| = |P^{-1}(A - tI_n)P| = |P^{-1}||A - tI_n||P| =$
$|P|^{-1}|A - tI_n||P| = |A - tI_n|$

Ισχυρισμός Όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, και άρα έχουν και τις ίδιες ιδιοτιμές. Αν A, B όμοιοι πίνακες $\Rightarrow P^{-1}AP = B$ όπου P αντιστρέψιμος. Έστω λ ιδιοτιμή του A άρα και του B. Έστω x ιδιοδιάνυσμα του B (*) που αντιστοιχεί στην λ: $Bx = \lambda x \Rightarrow P^{-1}AP \cdot x = \lambda \cdot x \Rightarrow$
$APx = P\lambda x \Rightarrow A(Px) = \lambda(Px)$ (1)
Αν $P \cdot x = 0 \Rightarrow P^{-1}Px \Rightarrow P^{-1} \cdot 0 = 0 \Rightarrow x = 0$ Άτοπο διότι (*)
Άρα $P \cdot x \neq 0$ (2)
Από (1), (2) $\Rightarrow Px$: ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην λ.
Αντίστροφα, Αν Px ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην λ τότε x ιδιοδιάνυσμα του B που αντιστοιχεί στην λ.